



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**ELEMENTOS DE
GEOMETRÍA DEL ESPACIO**

**CICLO
PRE
2024-1**



GEOMETRÍA DEL ESPACIO

La geometría del espacio tiene por objeto, el estudio de las figuras geométricas contenidas en el espacio geométrico.

La geometría del espacio es la generalización de la geometría plana cuyas propiedades resultan consecuencia lógica de los postulados ya aceptados para el plano, de los teoremas establecidos en la geometría plana y de los nuevos postulados que ahora se introducen.

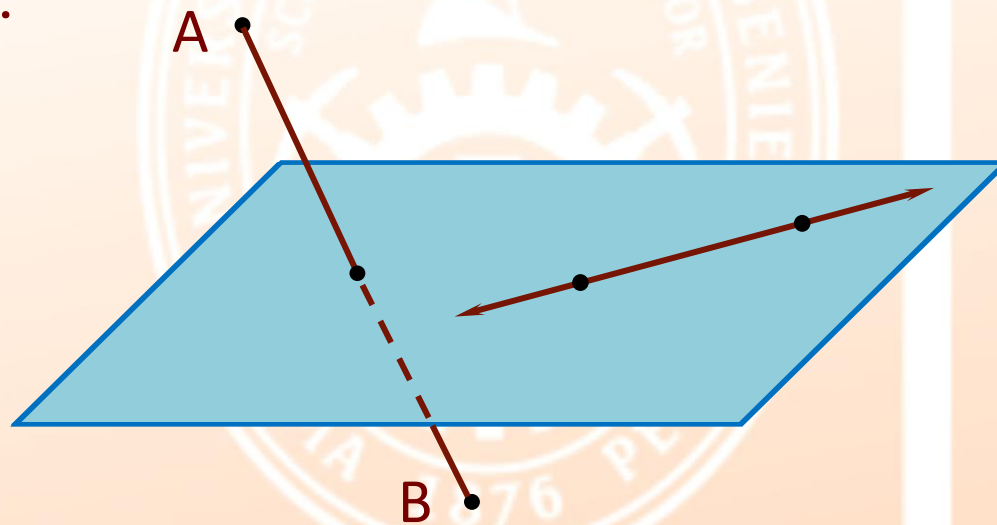
Definición.- El **espacio** es el conjunto de todos los puntos.

Definición.- Una **figura geométrica** es todo subconjunto no vacío del espacio.

POSTULADOS FUNDAMENTALES

1. Existen infinitas rectas e infinitos planos.
2. Todas las rectas y planos son conjuntos de puntos.
3. Por cada punto pasan infinitas rectas.
4. Dados dos puntos diferentes, existe una sola recta que los contiene.
5. Dados tres puntos no colineales, existe sólo un plano que los contiene.
6. Cada recta contiene al menos dos puntos, un plano contiene al menos tres puntos no colineales y el espacio geométrico contiene al menos cuatro puntos no coplanares.
7. Si dos planos se intersecan, entonces su intersección es una recta.

8. Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, entonces todos los puntos de la recta pertenecen al plano.
9. Existen infinitos puntos que no pertenecen a un plano.
10. Los puntos que no pertenecen al plano forman dos conjuntos llamados **semiespacios** tales que:
 - a) Cada conjunto es convexo.
 - b) Dados un punto en cada conjunto el segmento que los une interseca al plano.



EJERCICIO 01

Indique el valor de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Por dos puntos diferentes existe solo una recta que los contiene.
- II. Por tres puntos diferentes existe solo un plano que los contiene.
- III. Un plano determina en el espacio una partición de tres elementos convexos.

A) VVV

B) FVV

C) FFF

D) VFF

E) VFV

RESOLUCIÓN 01

Indique el valor de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

- Por dos puntos diferentes existe solo una recta que los contiene.
- Por tres puntos diferentes existe solo un plano que los contiene.
- Un plano determina en el espacio una partición de tres elementos convexos.

I.- ...V

Por postulado.

II.- ...F

Por postulado debe indicarse no colineales.

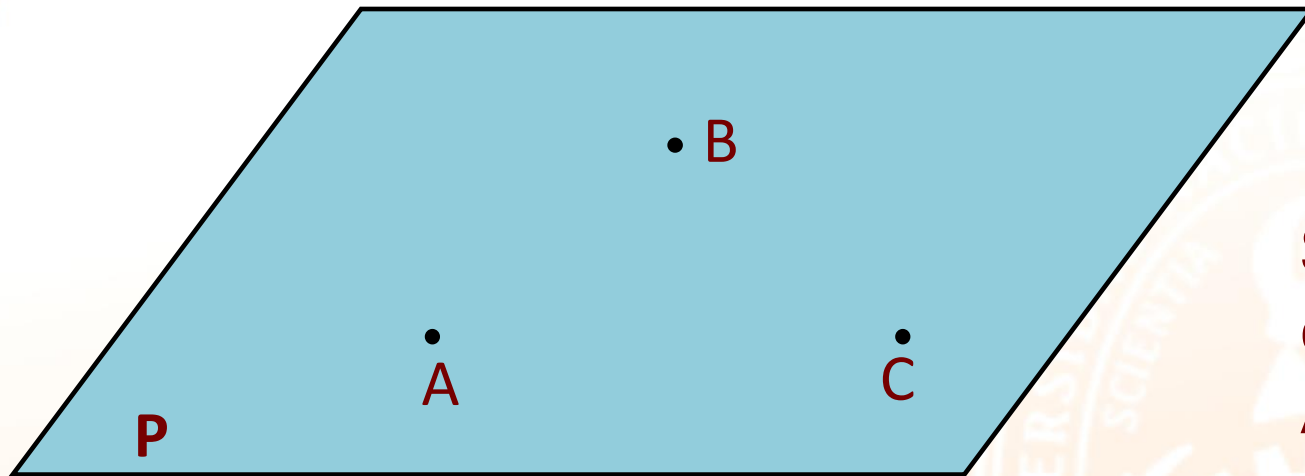
III.- ...V

Se determina dos semiespacios y el plano que son conjuntos convexos

Clave: E

DETERMINACIÓN DE UN PLANO

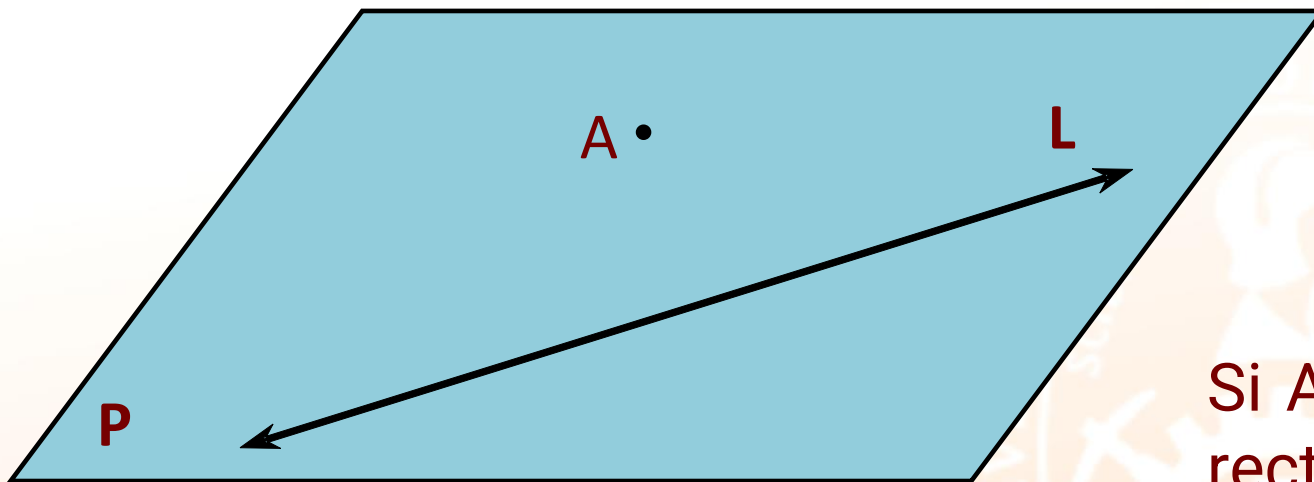
1.- POR TRES PUNTOS NO COLINEALES (POSTULADO)



Si los puntos A, B y C no son colineales, entonces los puntos A, B y C determinan el plano **P**.

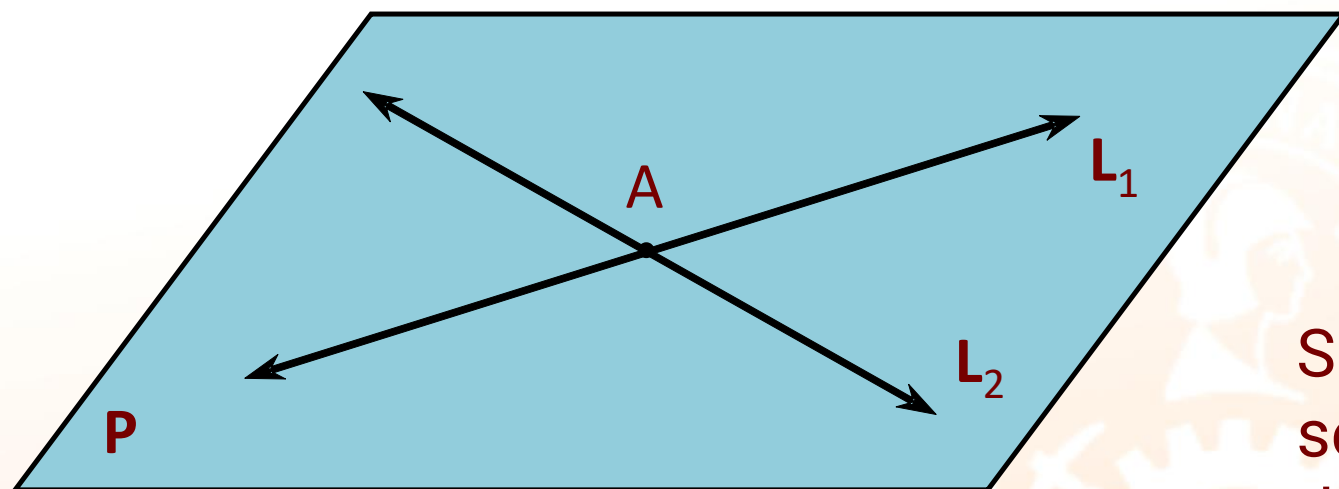
Nota: Un plano puede ser denotado de la siguiente manera: Plano ABC, es decir el plano determinado por los puntos A, B y C.

2.- POR UNA RECTA Y UN PUNTO EXTERIOR A LA RECTA



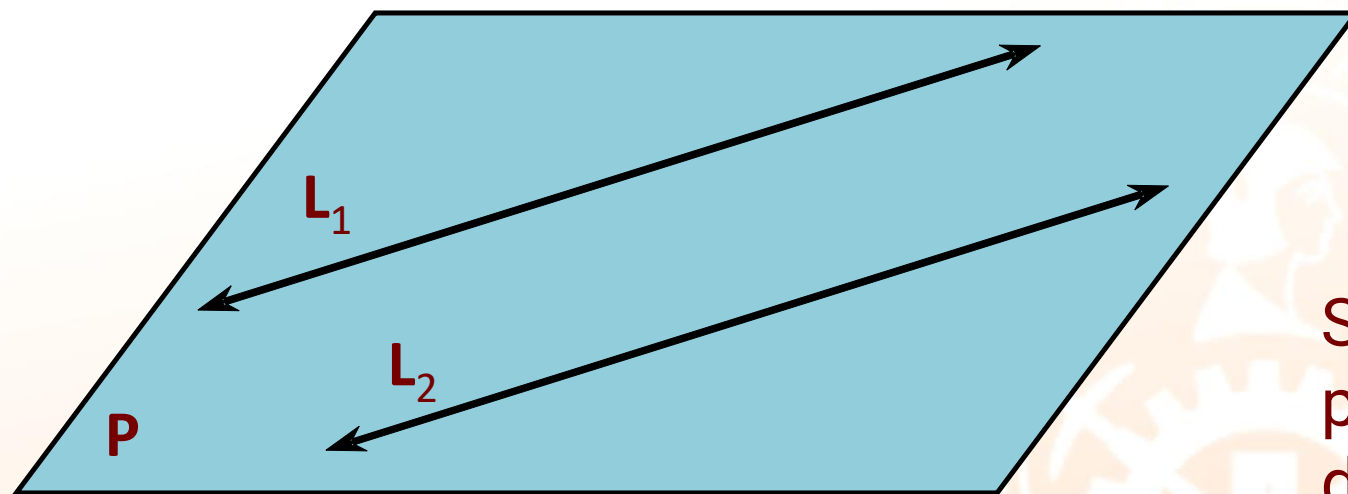
Si $A \notin L$, entonces el punto **A** y la recta **L** determinan el plano **P**.

3.- POR DOS RECTAS SECANTES



Si las rectas L_1 y L_2 son secantes, entonces L_1 y L_2 determinan el plano **P**.

4.- POR DOS RECTAS PARALELAS



Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, entonces L_1 y L_2 determinan el plano P .

EJERCICIO 02

Indique el valor de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Una recta y un punto determinan un plano.
- II. Dos rectas que no se intersecan determinan un plano.
- III. Dos rectas que no se intersecan son paralelas.

A) FFV

B) FVF

C) FFF

D) VFF

E) VFV

RESOLUCIÓN 02

Indique el valor de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Una recta y un punto determinan un plano.
- II. Dos rectas que no se intersecan determinan un plano.
- III. Dos rectas que no se intersecan son paralelas.

I.- ...F

El punto debe ser exterior.

II.- ...F

Podrían cruzarse y no determinarían un plano.

III.- ...F

Al no intersecarse podrían ser rectas cruzadas.

Clave: C

EJERCICIO 03

Se tienen 12 rectas y 10 puntos. Calcule el máximo número de planos que se puede determinar.

A) 296

B) 298

C) 302

D) 306

E) 310

RESOLUCIÓN 03

Se tienen 12 rectas y 10 puntos. Calcule el máximo número de planos que se puede determinar.

- **Con 12 rectas**, teorema 2 rectas secantes o 2 rectas paralelas determinan un plano.

$$C_2^{12} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{(12)(11)}{2} = 66$$

- **Con 10 puntos**, postulado 3 puntos no colineales determinan un plano.

$$C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{(10)(9)(8)}{3(2)} = 120$$

- **1 punto exterior y 1 recta determinan un plano**, luego 10 puntos y 12 rectas determinan: $12(10) = 120$
- **Finalmente:** $66 + 120 + 120 = 306$ planos

Clave: D



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**POSICIONES RELATIVAS
DE RECTAS Y PLANOS EN
EL ESPACIO**

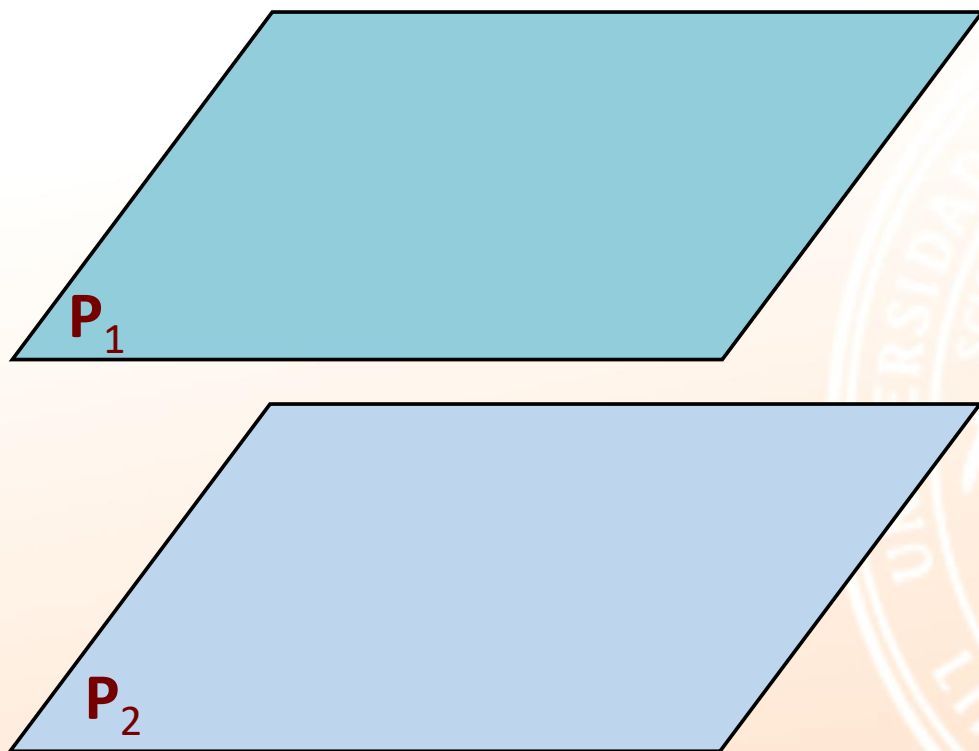
**CICLO
PRE
2024-1**



POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS PLANOS

1.- PLANOS PARALELOS

Dos planos son paralelos, si no tienen puntos en común.



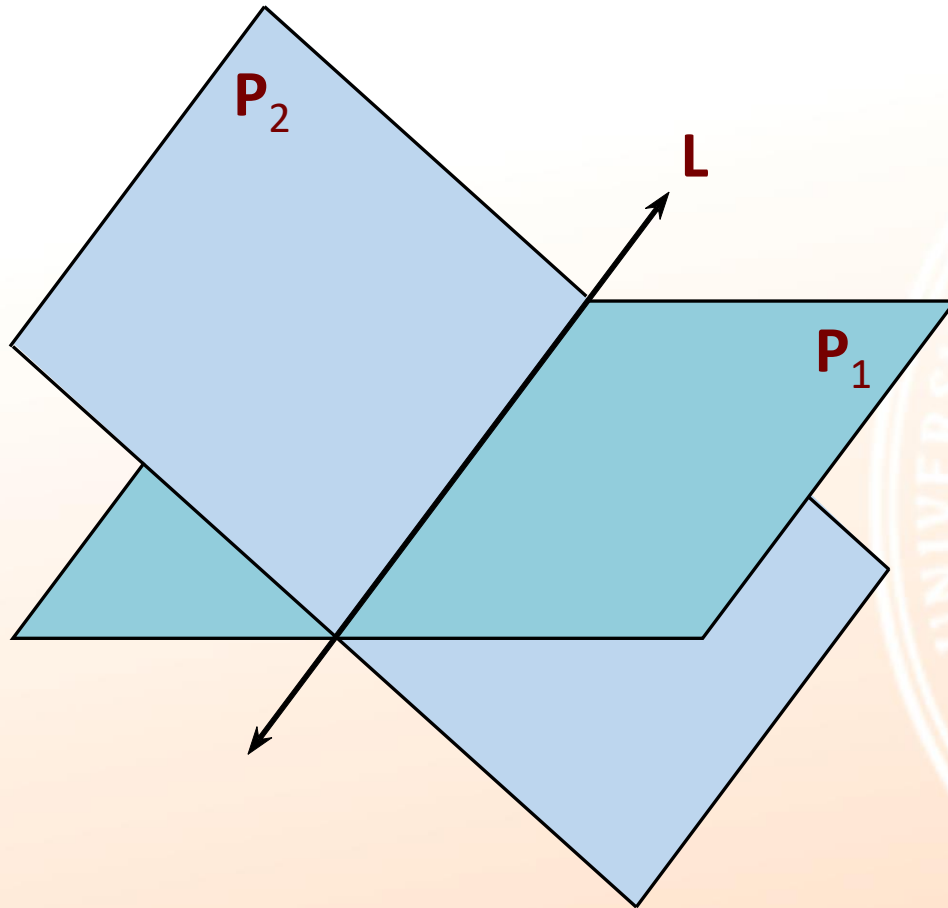
Notación:

$P_1 \parallel P_2$: P_1 paralelo a P_2

$$P_1 \parallel P_2 \iff P_1 \cap P_2 = \emptyset$$

2.- PLANOS SECANTES

Dos planos son secantes, si tienen puntos comunes. La intersección de dos planos secantes es una recta.



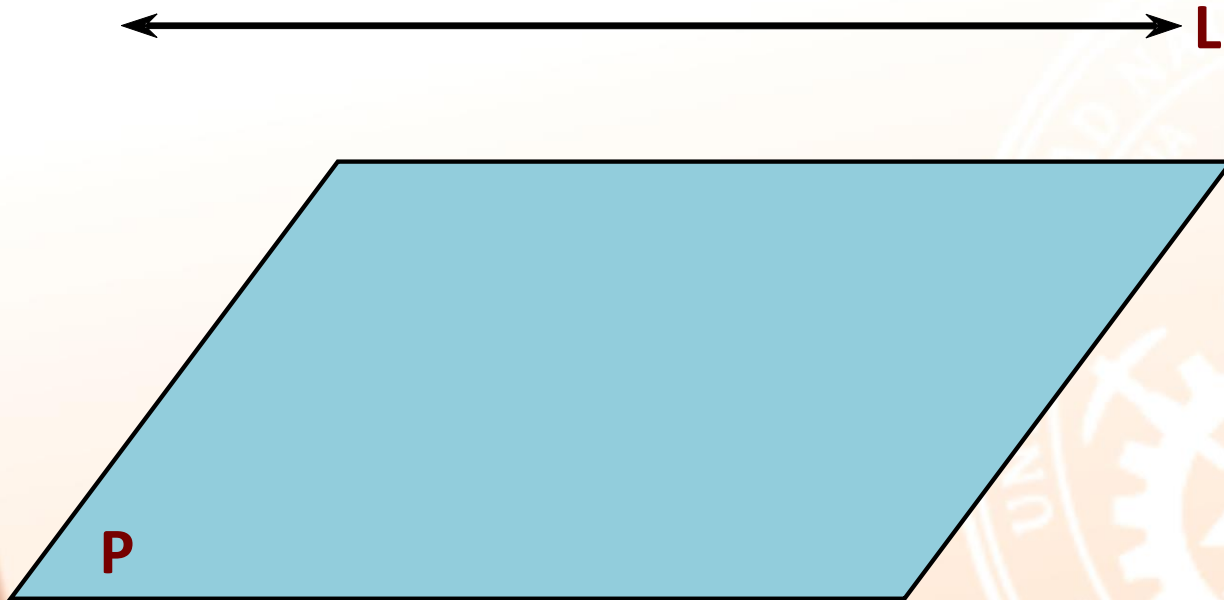
Los planos P_1 y P_2 son secantes si y solo si $P_1 \cap P_2 = L$

La recta L se denomina **arista** entre los planos P_1 y P_2 .

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN PLANO Y UNA RECTA

1.- PLANO Y RECTA PARALELOS

Un plano y una recta son paralelos, si no tienen punto en común.



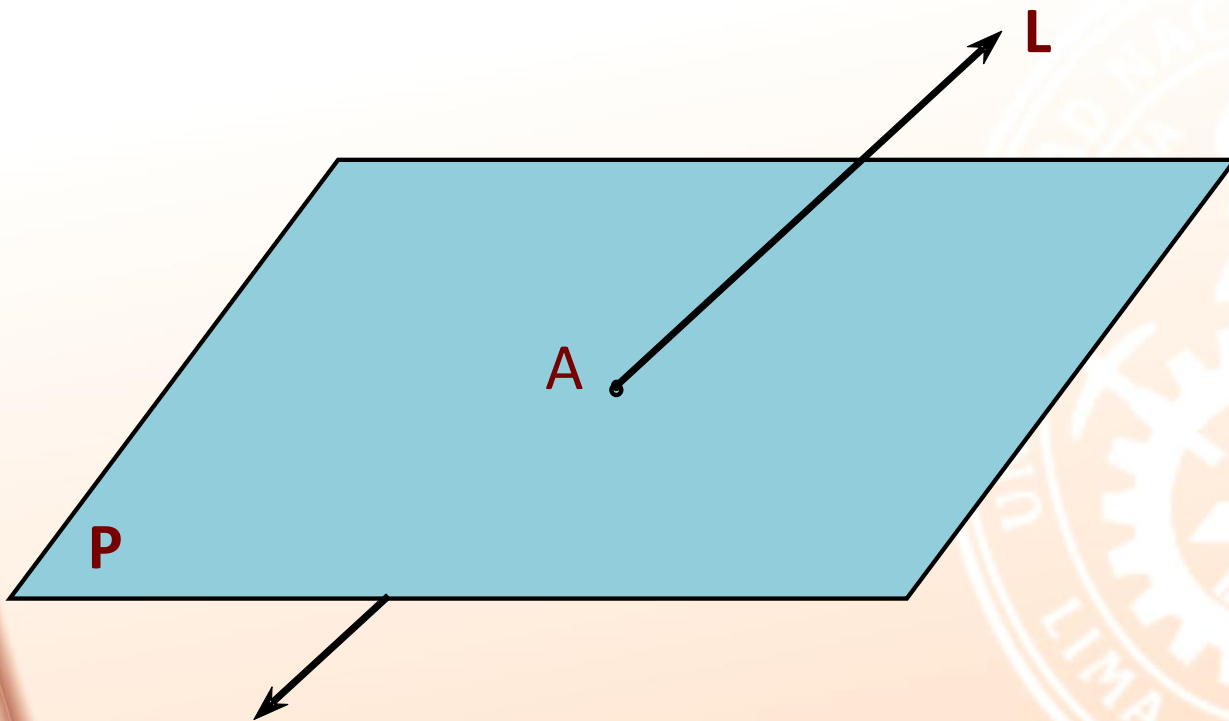
La recta **L** y el plano **P** son paralelos si y sólo si $L \cap P = \emptyset$

Notación:

$L \parallel P$: **L** paralelo a **P**

2.- PLANO Y RECTA SECANTES

Un plano y una recta son secantes, si tienen solo un punto común.



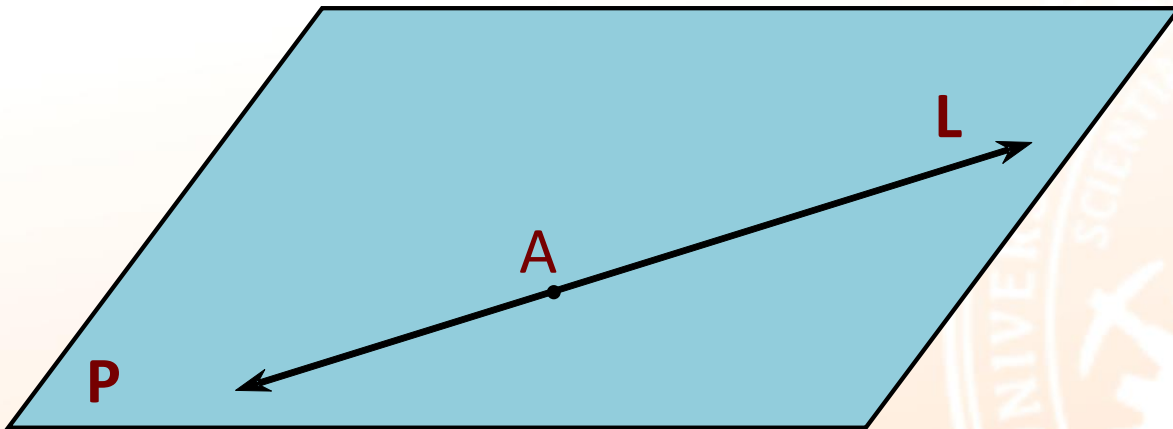
La recta **L** y el plano **P** son secantes si y sólo si

$$L \cap P = \{A\}$$

Nota: El punto **A** se denomina pie de la recta **L** en el plano **P**.

3.- RECTA CONTENIDA EN UN PLANO

Una recta está contenida en un plano, si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.



La recta **L** está contenida en el plano **P** si y sólo si para cada punto **A** de la recta **L**, el punto **A** pertenece al plano **P**.

Notación

$L \subset P$: **L** contenida en **P**

EJERCICIO 04

Indique el valor de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Si las intersecciones de dos planos con un tercero son rectas paralelas, entonces dichos planos son paralelos.
- II. Dos rectas paralelas y equidistantes a un plano, determinan otro plano paralelo a dicho plano.
- III. Dos planos paralelos a una misma recta son paralelos entre sí.

A) VVV

B) FVV

C) FFF

D) VFF

E) VFV

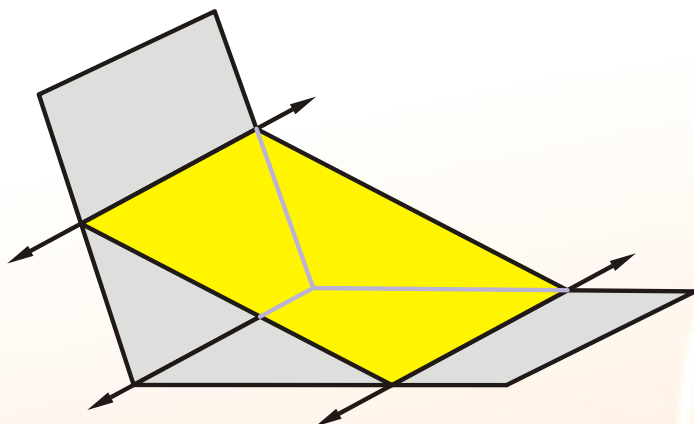
RESOLUCIÓN 04

Indique el valor de verdad para cada una de las siguientes proposiciones:

- Si las intersecciones de dos planos con un tercero son rectas paralelas, entonces dichos planos son paralelos.
- Dos rectas paralelas y equidistantes a un plano, determinan otro plano paralelo a dicho plano.
- Dos planos paralelos a una misma recta son paralelos entre sí.

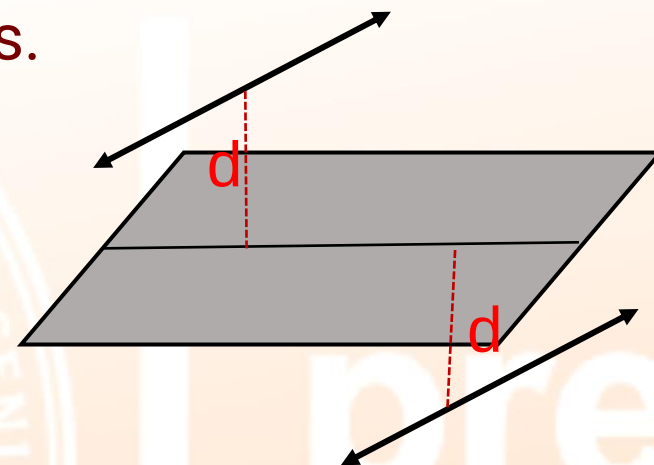
I.- Los planos pueden ser secantes

FALSO



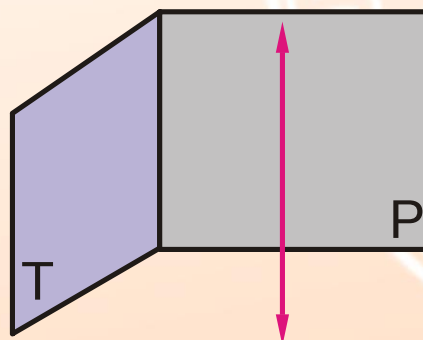
II.- Las rectas puede estar en diferentes semiespacios.

FALSO



III.- Los planos pueden ser secantes

FALSO

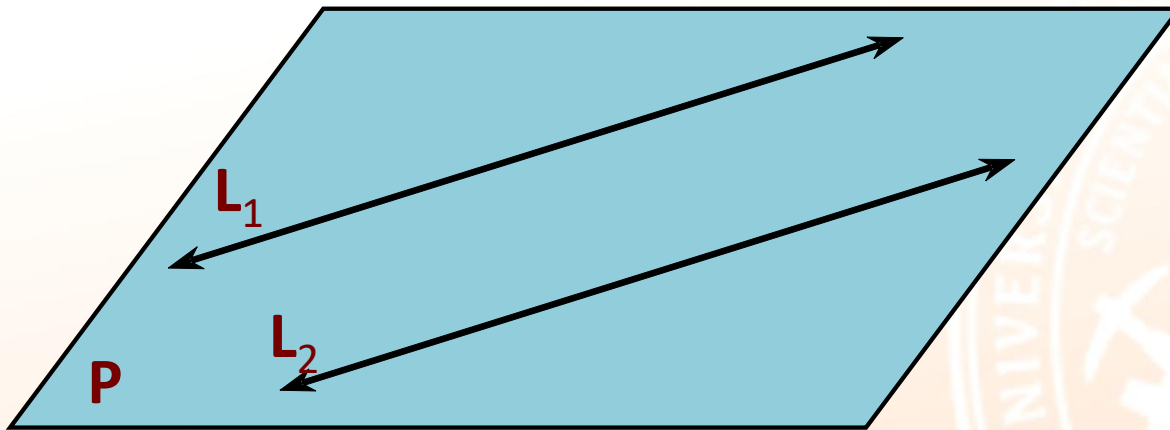


Clave: C

POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS

1.- RECTAS PARALELAS

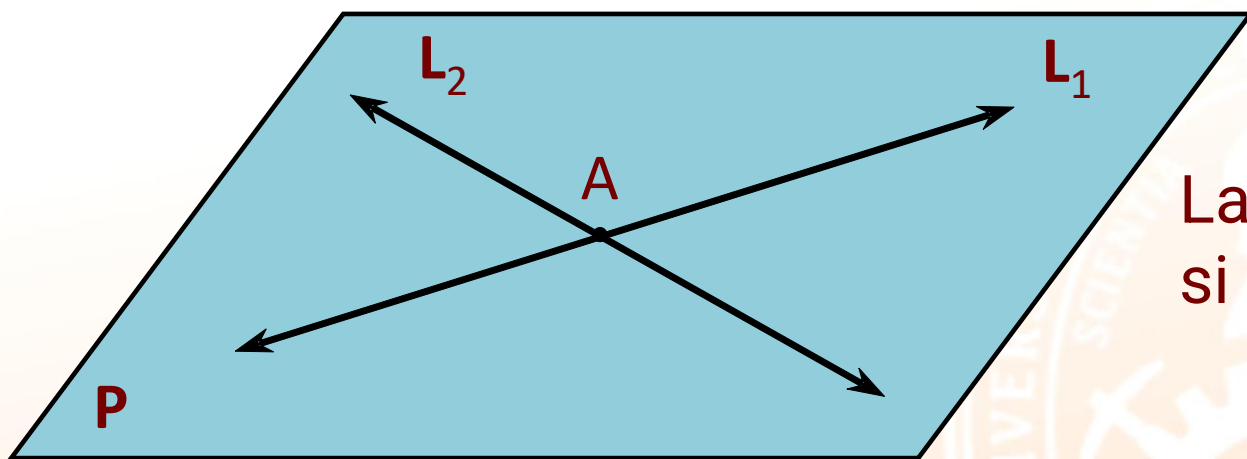
Dos rectas son paralelas, si no tienen punto común y están contenidos en un plano.



Las rectas L_1 y L_2 son paralelas si y solo si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $L_1 \subset P$ y $L_2 \subset P$ siendo P el plano que determinan.

2.- RECTAS SECANTES

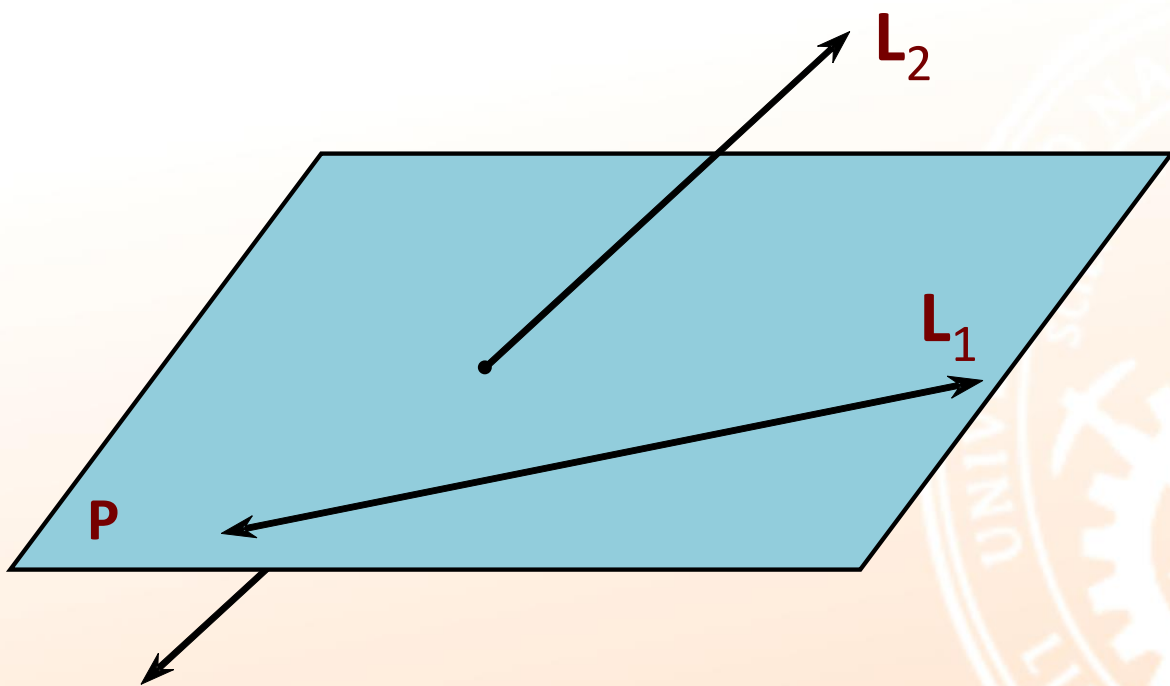
Dos rectas son secantes, si tienen solo un punto común.



Las rectas L_1 y L_2 son secantes si y solo si $L_1 \cap L_2 = \{A\}$.

3.- RECTAS CRUZADAS

Dos rectas son cruzadas, si no tienen punto común y no están contenidas en un mismo plano.



Las rectas L_1 y L_2 son cruzadas si y solo si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, $L_1 \subset P$ y $L_2 \not\subset P$.

EJERCICIO 05

Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Si dos rectas no se intersecan, entonces son cruzadas.
- II. Si la recta L_1 y el plano P tienen un punto en común, la recta L_2 y el plano P tienen dos puntos en común, entonces L_1 y L_2 son coplanares.
- III. Si dos rectas son cruzadas, entonces dichas rectas pueden estar contenidas en planos paralelos.

A) FVV

B) FFV

C) FFF

D) VVF

E) VVV

RESOLUCIÓN 05

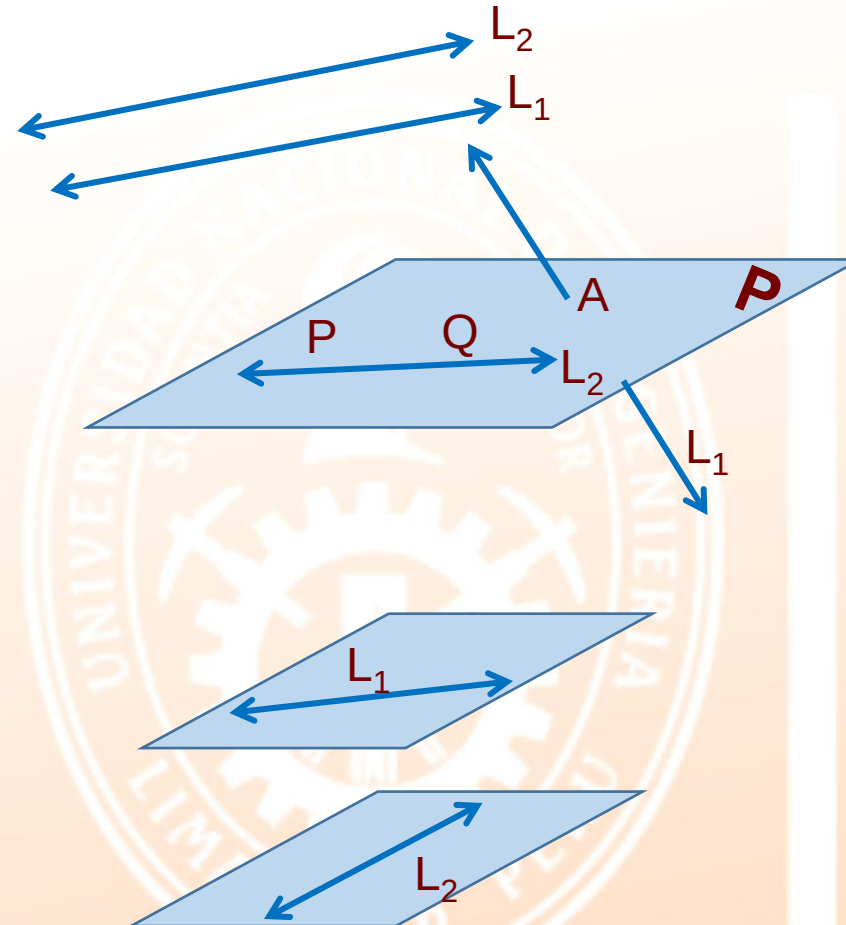
Indique el valor de verdad de cada proposición:

- I. Si dos rectas no se intersecan, entonces son cruzadas.
- II. Si la recta L_1 y el plano P tienen un punto en común, la recta L_2 y el plano P tienen dos puntos en común, entonces L_1 y L_2 son coplanares.
- III. Si dos rectas son cruzadas, entonces dichas rectas pueden estar contenidas en planos paralelos.

I. F Pueden ser paralelas

II. F Son rectas cruzadas o secantes

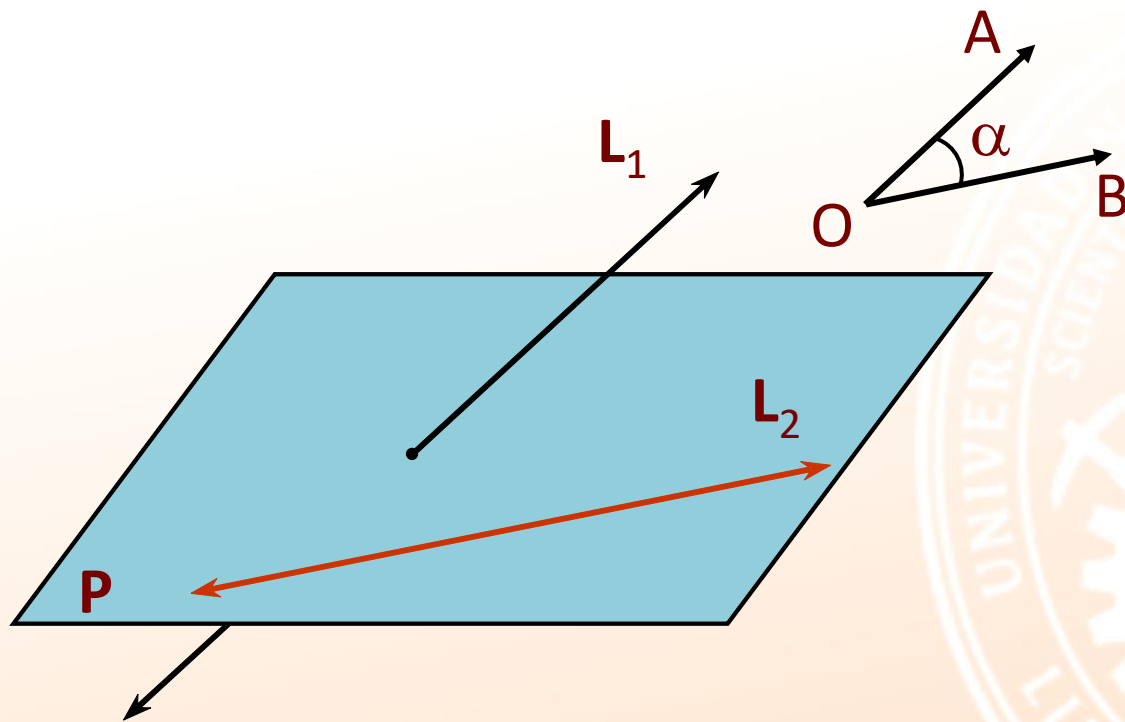
III. V Las rectas pueden estar contenidas en planos paralelos



Clave: B

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS CRUZADAS

Definición.- Es el ángulo determinado por dos rayos paralelos a cada una de las rectas cruzadas, trazados desde un punto cualquiera del espacio.



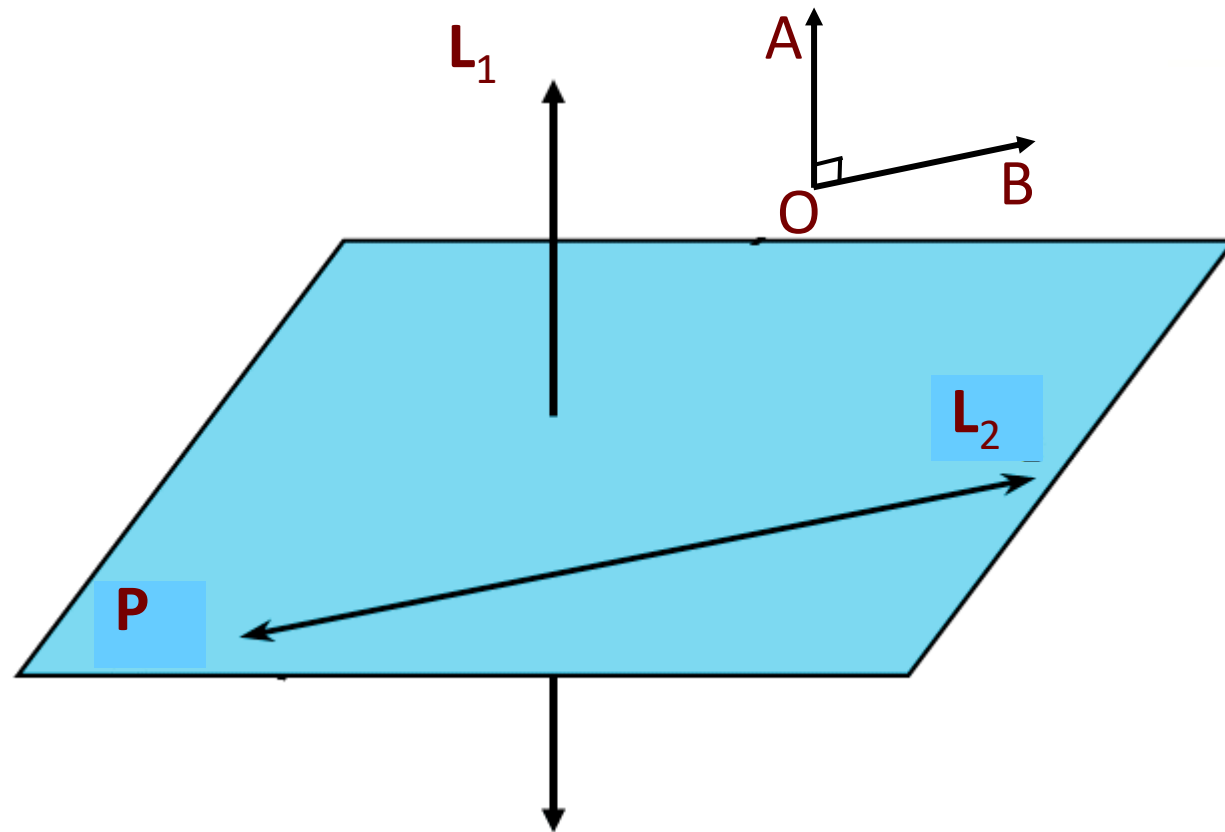
Si $\overrightarrow{OA} \parallel L_1$ y $\overrightarrow{OB} \parallel L_2$, entonces el ángulo AOB es el ángulo entre las rectas L_1 y L_2 .

Nota:

Si $m\angle AOB = \alpha$, entonces α es la medida del ángulo entre las rectas L_1 y L_2 .

RECTAS PERPENDICULARES

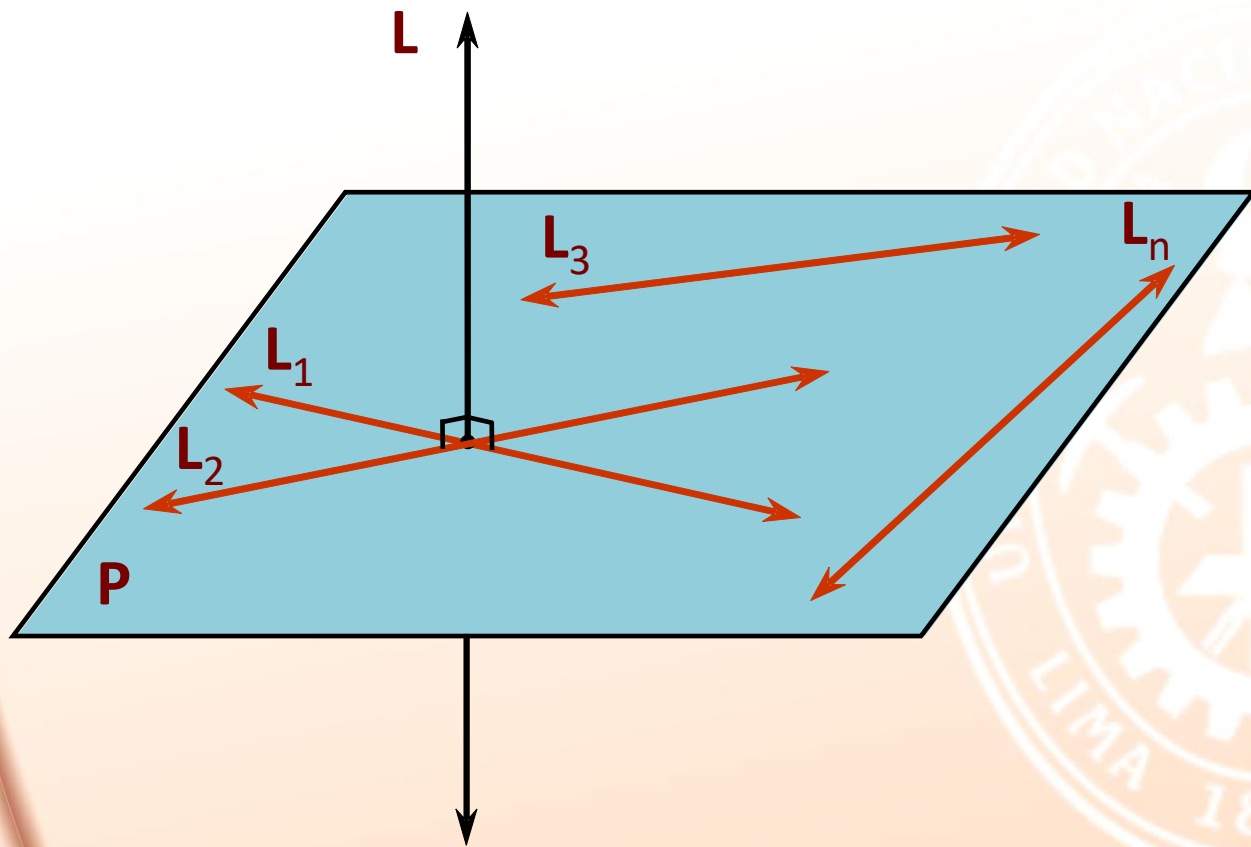
Definición.- Dos rectas se denominan ortogonales o perpendiculares si la medida del ángulo entre las rectas es 90.



Si $\overrightarrow{OA} \parallel L_1$, $\overrightarrow{OB} \parallel L_2$ y $m\angle AOB = 90$, entonces L_1 y L_2 son rectas perpendiculares.

RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

Dados una recta y un plano, si la recta es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano, entonces se dice que la recta y el plano son perpendiculares.



Sea la recta L y el plano P .

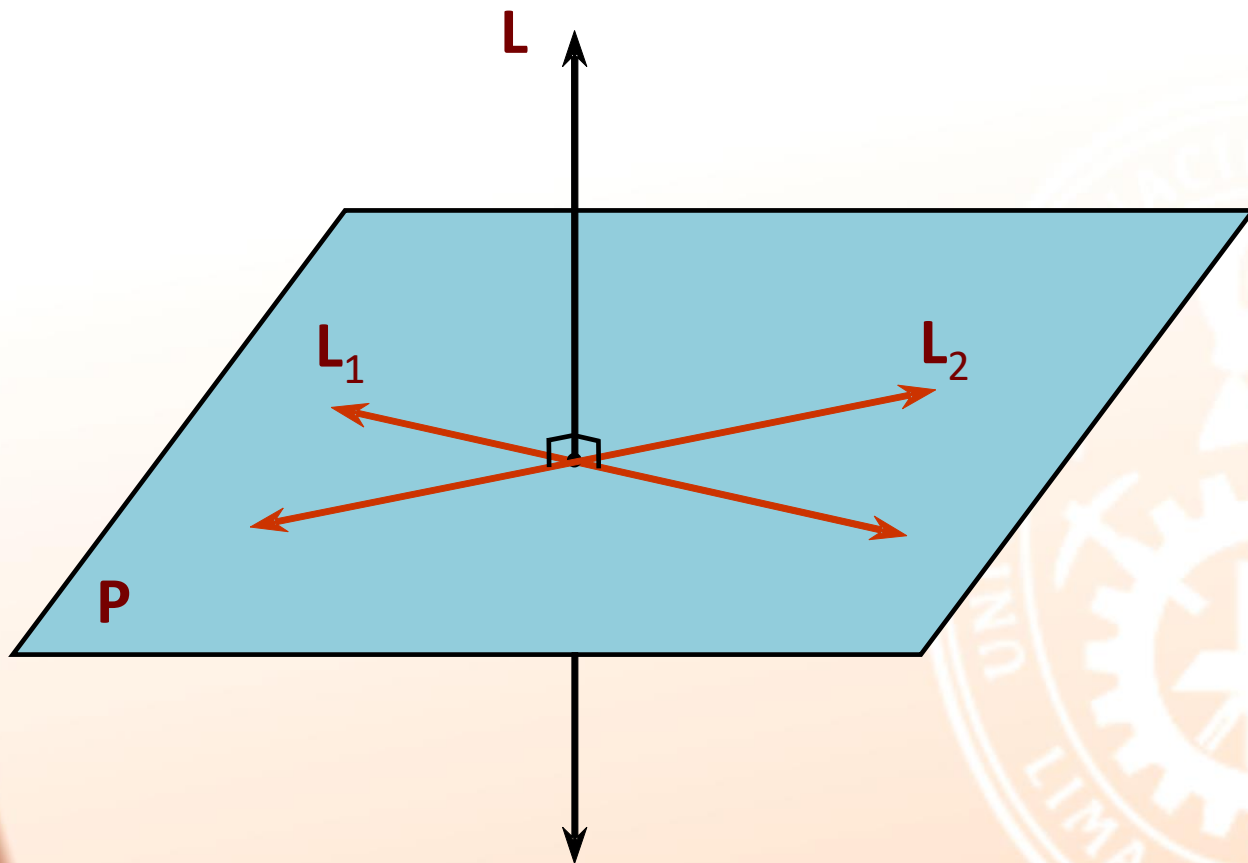
Si $L \perp L_i$ y para todo $i \in N$, entonces la recta L y el plano P son perpendiculares.

Notación:

$L \perp P$: L perpendicular a P

Teorema

Si una recta es perpendicular a dos rectas secantes, entonces la recta es perpendicular al plano que las contiene.



Sean las rectas secantes L_1 y L_2 contenidas en el plano P y la recta L .

Si $L \perp L_1$ y $L \perp L_2$,
entonces $L \perp P$

EJERCICIO 06

En un triángulo isósceles ABC , recto en B , en $\overline{BC}$ se ubica el punto H y se traza $\overline{HP}$ perpendicular al plano ABC . Si $AB = \sqrt{2} (PH)$ y $m\angle APC = m\angle PCA$, entonces la $m\angle APH$ es

A) 60

B) 30

C) 45

D) 53

E) 37

RESOLUCIÓN 06

En un triángulo isósceles ABC, recto en B, en $\overline{BC}$ se ubica el punto H y se traza $\overline{HP}$ perpendicular al plano ABC. Si $AB = \sqrt{2} (PH)$ y $m\angle APC = m\angle PCA$, entonces la $m\angle APH$ es

Calcule $m\angle APH = x$

$\triangle ABC$: notable de 45

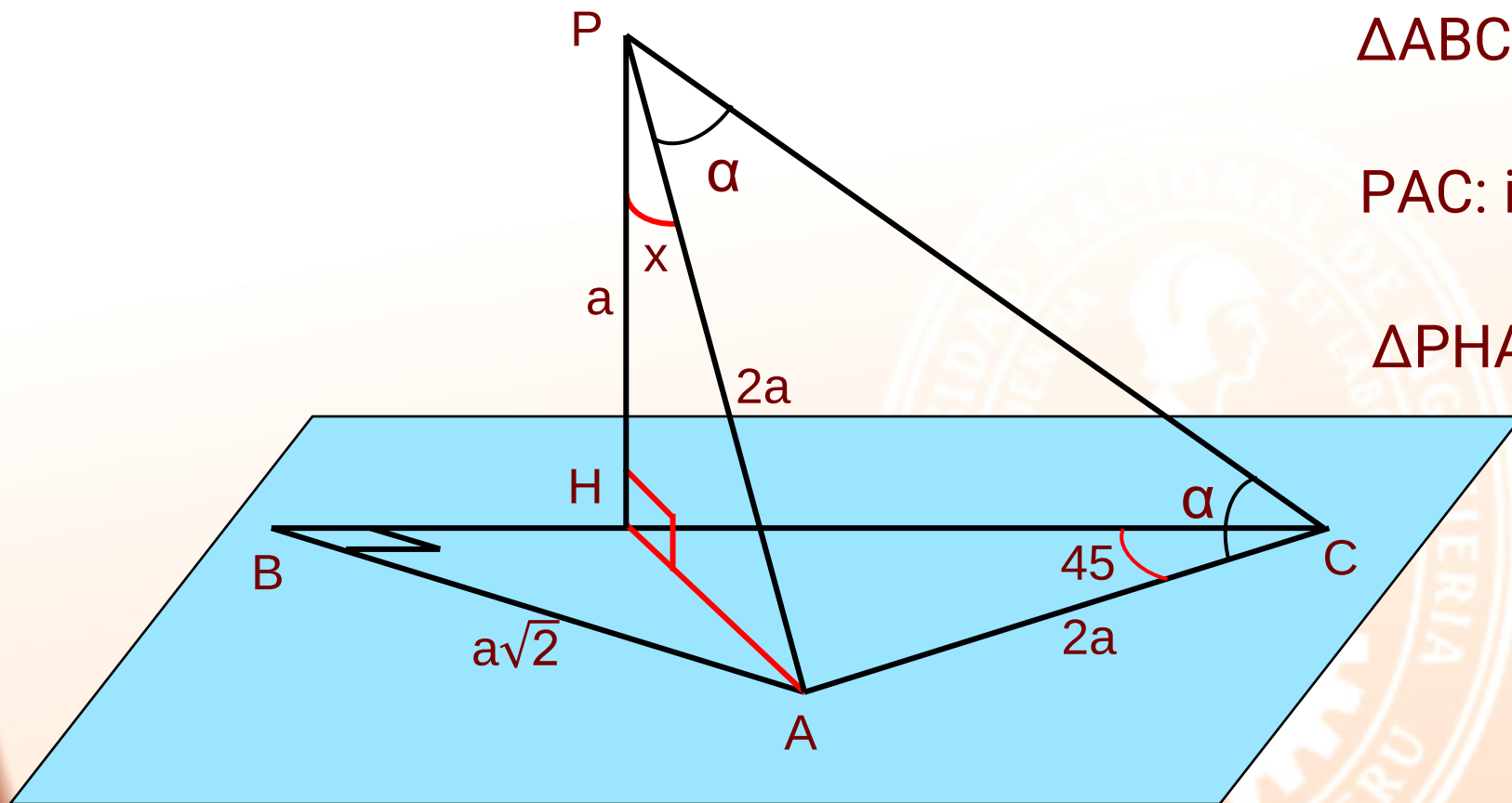
$\rightarrow AC = 2a$

$\triangle PAC$: isósceles

$\rightarrow PA = AC = 2a$

$\triangle PHA$: notable de 30 y 60

$x = 60$



Clave: A

EJERCICIO 07

Un triángulo isósceles ABC , recto en B , está contenido en un plano y $\overline{AT}$ es perpendicular al plano ABC . Si $AT = BC$, entonces la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{TB}$ es

A) 90

B) 60

C) 135

D) 75

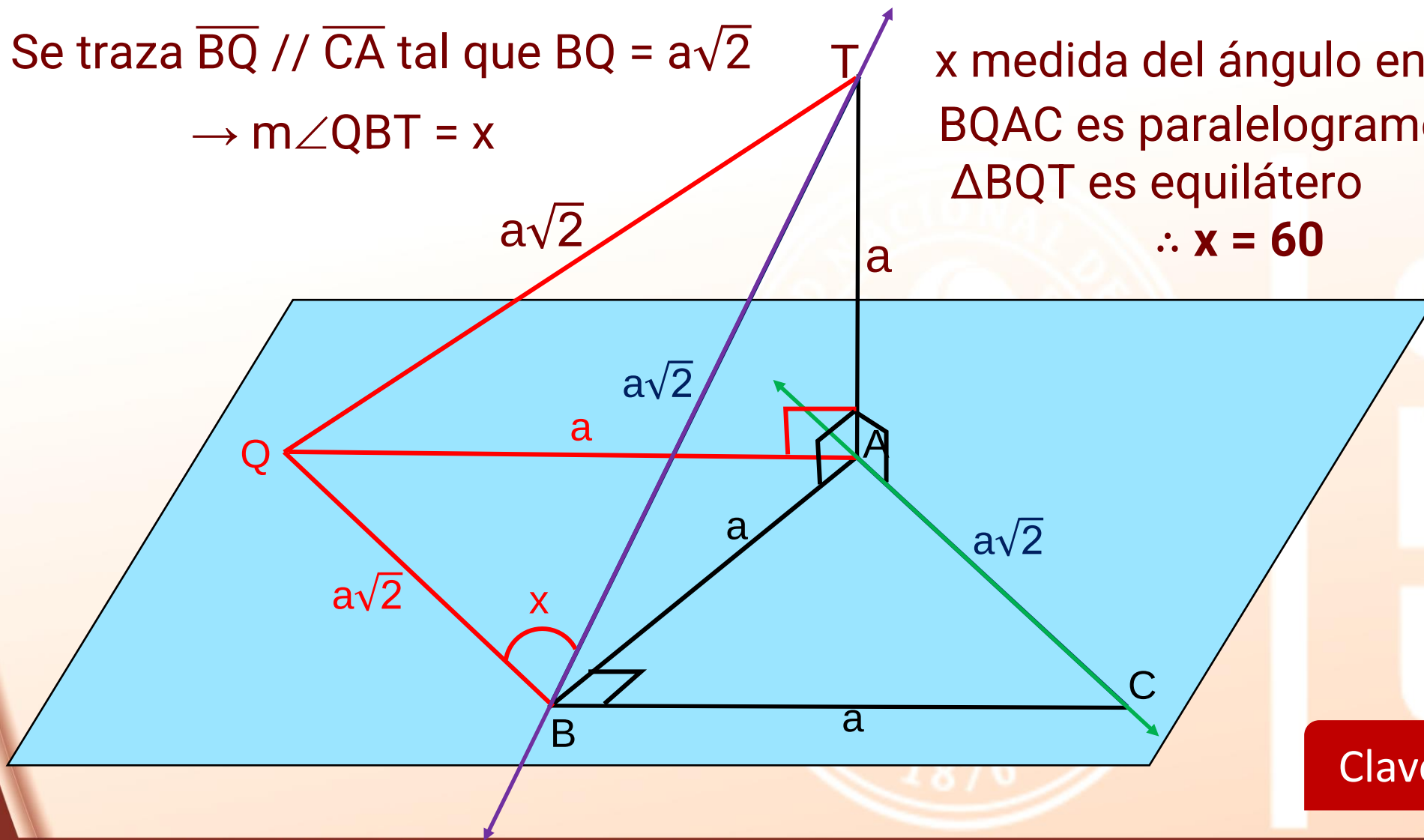
E) 150

RESOLUCIÓN 07

Un triángulo isósceles ABC , recto en B , está contenido en un plano y $\overline{AT}$ es perpendicular al plano ABC . Si $AT = BC$, entonces la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{TB}$ es

Se traza $\overline{BQ} \parallel \overline{CA}$ tal que $BQ = a\sqrt{2}$
 $\rightarrow m\angle QBT = x$

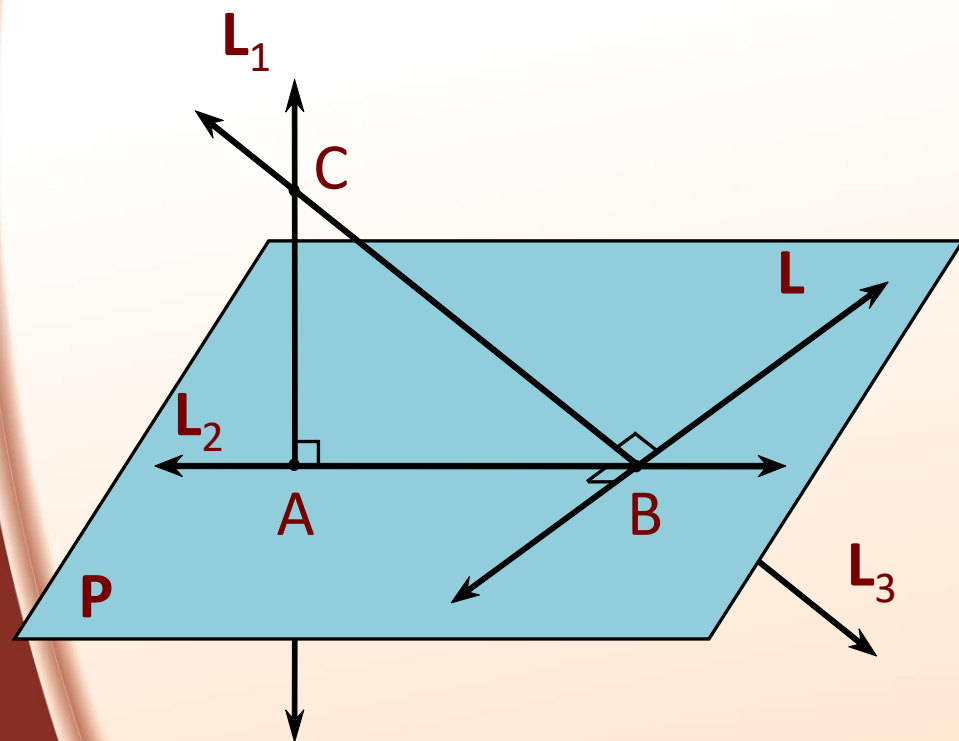
x medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{TB}$
 $BQAC$ es paralelogramo: $QA = a$
 ΔBQT es equilátero
 $\therefore x = 60$



Clave: E

Teorema de las Tres Perpendiculares

Si por el pie de una recta perpendicular a un plano se traza una recta perpendicular a otra recta contenida en el plano, entonces toda recta que contiene al pie de la segunda perpendicular e interseca a la primera, es perpendicular a la recta contenida en el plano.



Sean la recta L_1 y el plano P tal que $L \perp L_1$, $L_1 \cap P = \{A\}$ y $C \in L_1$.

Si $L_2 \perp L$ tal que $A \in L_1$, $L \subset P$, $L \cap L_2 = \{B\}$, $\{B, C\} \subset L_3$, entonces $L_3 \perp L$

EJERCICIO 08

En un plano P se sitúa una circunferencia de diámetro $AB = 2a$. Si por A se levanta $AF=2a$ perpendicular al plano P y M es punto medio del arco AB, halle, en términos de a, el área de la región del triángulo FMB.

A) $a^2\sqrt{2}$

D) $a^2\sqrt{3}$

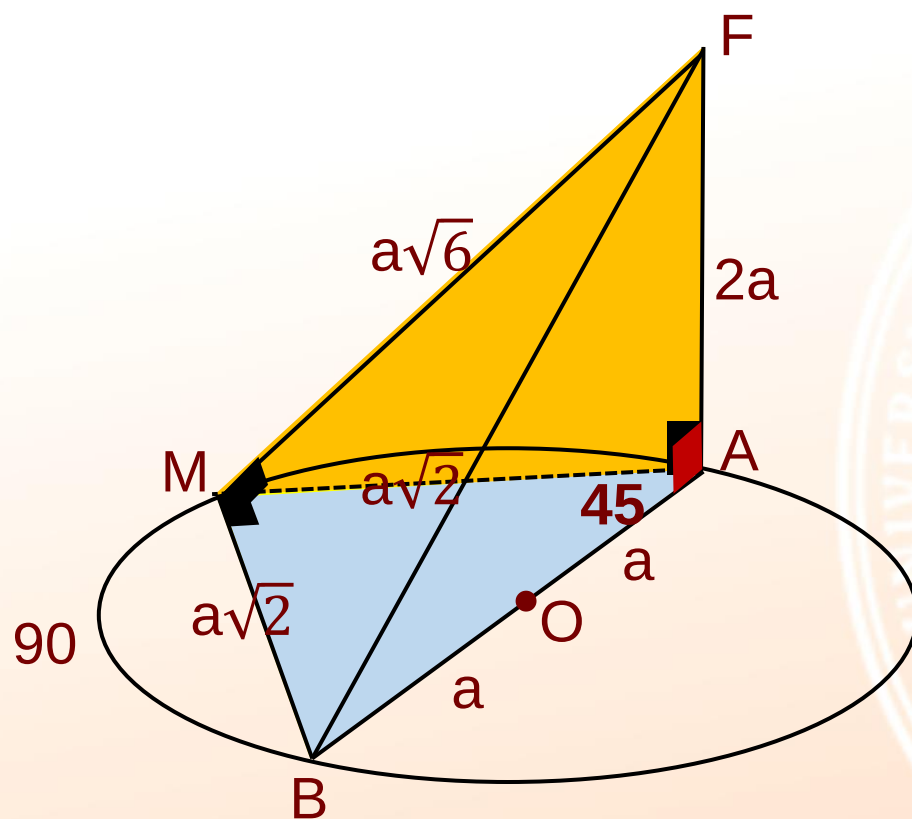
B) a^2

E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

C) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

RESOLUCIÓN 08

En un plano P se sitúa una circunferencia de diámetro $AB = 2a$. Si por A se levanta $AF = 2a$ perpendicular al plano P y M es punto medio del arco AB, halle, en términos de a, el área de la región del triángulo FMB.



Analizando ángulos:

$$m\angle MAB = 45, m\angle BMA = 90 \quad MB = MA = a\sqrt{2}$$

Teorema de 3 perpendiculares: $m\angle BMF = 90$

En el Δ rectángulo FAM:

$$FM = \sqrt{(2a)^2 + (a\sqrt{2})^2}$$

$$FM = a\sqrt{6}$$

$$S_{FMB} = MB \cdot MF / 2 \rightarrow S_{FMB} = (a\sqrt{2})(a\sqrt{6}) / 2$$

$$S_{FMB} = a^2\sqrt{3}$$

Clave: D

EJERCICIO 09

En un cuadrilátero $ABCD$, se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano que lo contiene; siendo M el punto medio de $\overline{AD}$. Si $AP = BC = 10$ u, $CD = 4$ u, $m\angle PMC = 90$ y $m\angle BCM = m\angle MCD$, entonces la longitud (en u) de $\overline{PB}$ es

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

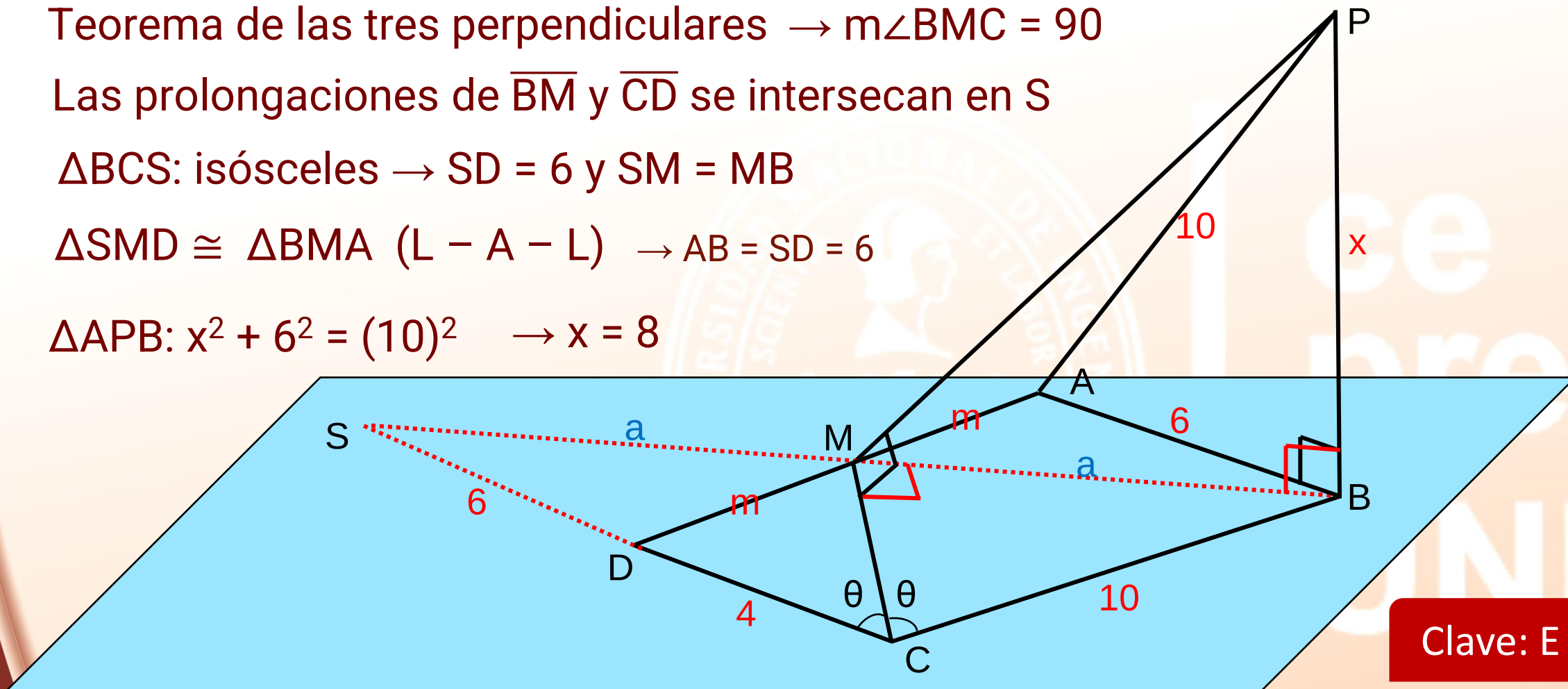
En un cuadrilátero ABCD, se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano que lo contiene; siendo M el punto medio de $\overline{AD}$. Si $AP = BC = 10$ u, $CD = 4$ u, $m\angle PMC = 90$ y $m\angle BCM = m\angle MCD$, entonces la longitud (en u) de $\overline{PB}$ es

Calcule $PB = x$

Teorema de las tres perpendiculares $\rightarrow m\angle BMC = 90$

Las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en S

$\triangle BCS$: isósceles $\rightarrow SD = 6$ y $SM = MB$

$$\Delta SMD \cong \Delta BMA \quad (L - A - L) \rightarrow AB = SD = 6$$
$$\triangle APB: x^2 + 6^2 = (10)^2 \rightarrow x = 8$$


Clave: E

EJERCICIO 10

Por el vértice A de un triángulo ABC, se traza la perpendicular $\overline{AT}$ al plano P que lo contiene tal que $AT = 2(BC)$. Calcule la medida aproximada del ángulo entre P y la recta que contiene a los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{TC}$.

A) 30

B) 60

C) 18,5

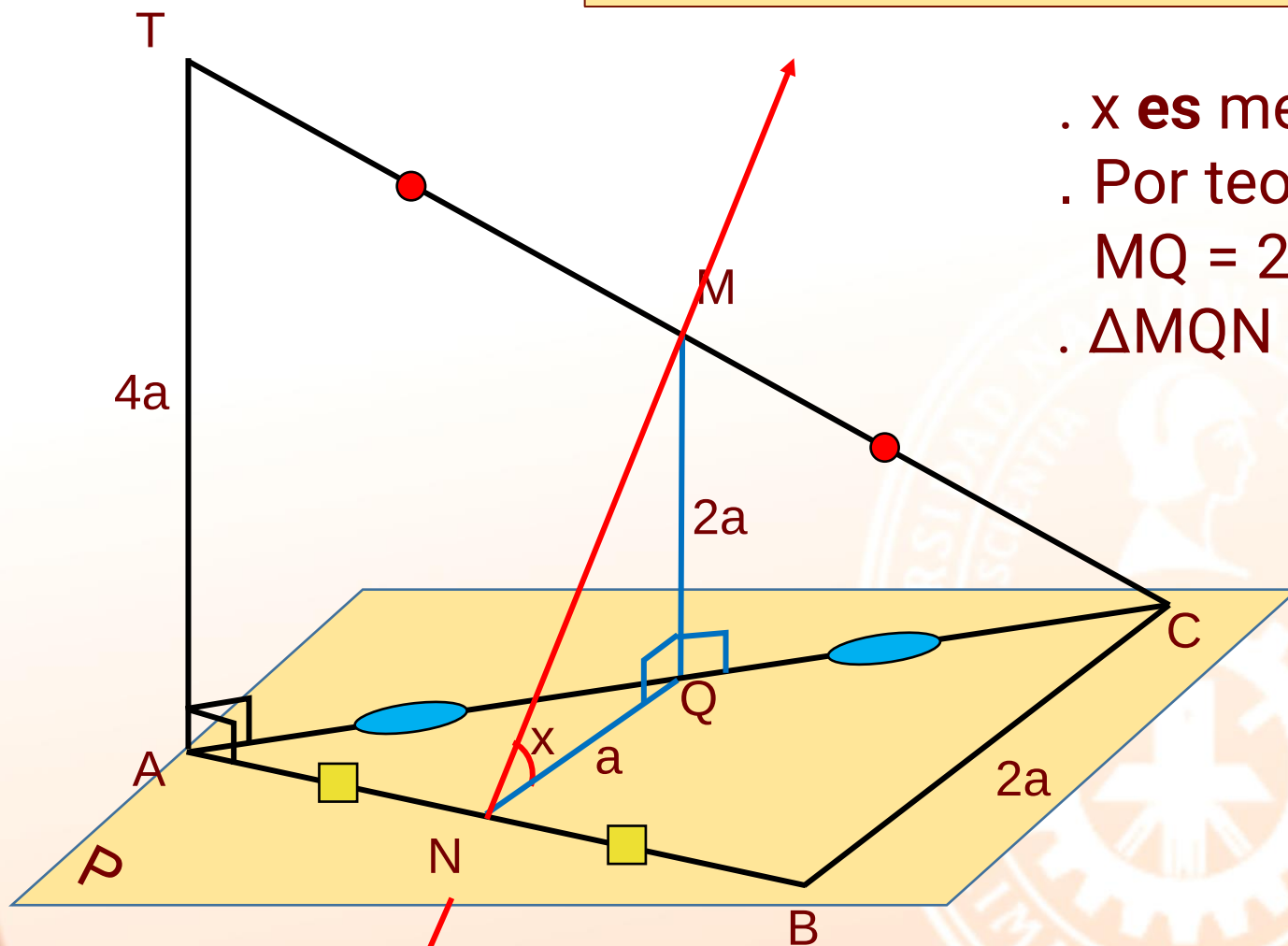
D) 26,5

E) 63,5

ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 10

Por el vértice A de un triángulo ABC, se traza la perpendicular $\overline{AT}$ al plano P que lo contiene tal que $AT = 2(BC)$. Calcule la medida aproximada del ángulo entre P y la recta que contiene a los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{TC}$.



- . x es medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{MN}$ y P
- . Por teorema de punto medio
 $MQ = 2a$ y $QN = a$
- . ΔMQN aproximado (26,5 y 63,5)

$$\rightarrow x = 63,5$$

Clave: E